

Системы компьютерной алгебры

Андрей Грозин
Институт ядерной физики СО РАН
`A.G.Grozin@inp.nsk.su`

Системы компьютерной алгебры

Система	Год	Язык реализации	Текущее название	Статус
REDUCE	1968	Lisp		BSD
Macsyma	1969		Maxima	GPL
Scratchpad	1974		Axiom OpenAxiom FriCAS	BSD
muMATH	1979		Derive	Мертва
Maple	1983		C, C++	
<i>Mathematica</i>	1988			Пропр
MuPAD	1992	MATLAB symbolic toolbox		Пропр
SymPy	2007	Python		BSD
Sage	2005		SageMath	GPL

Масыма

MAC SYmbolic MAnipulator

MIT проект MAC (1963–1982)

Mathematics And Computation

Man And Computer

Multiple Access Computer

Machine Aided Cognition

Man Against Computer

Moses And Company

Maniacs And Clowns

PDP-6, позднее PDP-10 (36-битные слова, около 1М памяти, система разделения времени ITS, Macclisp), ARPAnet

Масыма

MAC SYmbolic MAnipulator

MIT проект MAC (1963–1982)

Mathematics And Computation

Man And Computer

Multiple Access Computer

Machine Aided Cognition

Man Against Computer

Moses And Company

Maniacs And Clowns

PDP-6, позднее PDP-10 (36-битные слова, около 1М памяти, система разделения времени ITS, Macclisp), ARPAnet

Symbolics (1982–1992) Лисп-машины

Масыма

MAC SYmbolic MAnipulator

MIT проект MAC (1963–1982)

Mathematics And Computation

Man And Computer

Multiple Access Computer

Machine Aided Cognition

Man Against Computer

Moses And Company

Maniacs And Clowns

PDP-6, позднее PDP-10 (36-битные слова, около 1М памяти, система разделения времени ITS, Macclisp), ARPAnet

Symbolics (1982–1992) Лисп-машины

Macsyma Inc. (1992-1999) Windows

Macsum

В 1999 фирму купило частное лицо, пожелавшее остаться неизвестным, а именно Andrew Topping. Он уволил всех разработчиков и прекратил развитие Macsum. Он думал, что эта система стоит много миллионов, и собирался её перепродать. Потом он умер, не оставив завещания. Права на коммерческую версию Macsum (с многими улучшениями), очевидно, принадлежат его наследникам.

Macsyma

В 1999 фирму купило частное лицо, пожелавшее остаться неизвестным, а именно Andrew Topping. Он уволил всех разработчиков и прекратил развитие Macsyma. Он думал, что эта система стоит много миллионов, и собирался её перепродать. Потом он умер, не оставив завещания. Права на коммерческую версию Macsyma (с многими улучшениями), очевидно, принадлежат его наследникам.

DOE Macsyma (1982–1998) Последняя версия из MIT, продавалась по цене магнитной ленты + работы по копированию (без права перераспространения). Была портирована на разные машины и лисп-системы. Все эти веточки вымерли, кроме одной.

Maxima

William Schelter (1982–2001) Версия на Common Lisp (и GNU Common Lisp). В 1998 получил разрешение DOE распространять под GPL.

Maxima

William Schelter (1982–2001) Версия на Common Lisp (и GNU Common Lisp). В 1998 получил разрешение DOE распространять под GPL.

Ныне активный free software проект, может работать под многими свободными реализациями Common Lisp.

REDUCE

Физик-теоретик Anthony Hearn (правило сумм Дрелла–Хёрна в глубоко неупругом рассеянии) написал на лиспе программу, помогающую вычислять Фейнмановские диаграммы (1968). Поначалу распространялась бесплатно, достаточно было попросить разрешение Хёрна, и широко распространилась среди физиков.

REDUCE

Физик-теоретик Anthony Hearn (правило сумм Дрелла–Хёрна в глубоко неупругом рассеянии) написал на лиспе программу, помогающую вычислять Фейнмановские диаграммы (1968). Поначалу распространялась бесплатно, достаточно было попросить разрешение Хёрна, и широко распространилась среди физиков.

Standard Lisp (PSL, CSL); Rlisp

REDUCE

Физик-теоретик Anthony Hearn (правило сумм Дрелла–Хёрна в глубоко неупругом рассеянии) написал на лиспе программу, помогающую вычислять Фейнмановские диаграммы (1968). Поначалу распространялась бесплатно, достаточно было попросить разрешение Хёрна, и широко распространилась среди физиков.

Standard Lisp (PSL, CSL); Rlisp

Коммерческая: Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (Winfried Neun); Codemist Ltd. (John Fitch)

REDUCE

Физик-теоретик Anthony Hearn (правило сумм Дрелла–Хёрна в глубоко неупругом рассеянии) написал на лиспе программу, помогающую вычислять Фейнмановские диаграммы (1968). Поначалу распространялась бесплатно, достаточно было попросить разрешение Хёрна, и широко распространилась среди физиков.

Standard Lisp (PSL, CSL); Rlisp

Коммерческая: Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (Winfried Neun); Codemist Ltd. (John Fitch)

В 2008 открыта под BSD лицензией

REDUCE

Физик-теоретик Anthony Hearn (правило сумм Дрелла–Хёрна в глубоко неупругом рассеянии) написал на лиспе программу, помогающую вычислять Фейнмановские диаграммы (1968). Поначалу распространялась бесплатно, достаточно было попросить разрешение Хёрна, и широко распространилась среди физиков.

Standard Lisp (PSL, CSL); Rlisp

Коммерческая: Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin (Winfried Neun); Codemist Ltd. (John Fitch)

В 2008 открыта под BSD лицензией

Занимает 1-е место по ряду бенчмарков скорости полиномиальной алгебры

Scratchpad \rightarrow Axiom

Исследовательский центр IBM, Richard Jenks
(1974–1990)

Scratchpad II (1985)

Scratchpad → Axiom

Исследовательский центр IBM, Richard Jenks
(1974–1990)

Scratchpad II (1985)

NAG Axiom (1992–2001)

300 человеко-лет высококвалифицированного труда
могли бесследно исчезнуть

Scratchpad → Axiom

Исследовательский центр IBM, Richard Jenks
(1974–1990)

Scratchpad II (1985)

NAG Axiom (1992–2001)

300 человеко-лет высококвалифицированного труда
могли бесследно исчезнуть

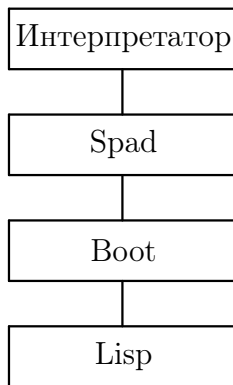
Tim Daly (2002) получил разрешение распространять
под BSD

Scratchpad \rightarrow Axiom

- ▶ Статическая сильная типизация
- ▶ Любой объект (формула) принадлежит некоторому *домену*
(например, это полином от одной переменной с целыми коэффициентами)
- ▶ Домен принадлежит какой-нибудь *категории*
(колец, коммутативных групп, полностью упорядоченных множеств, ...)
- ▶ Новые домены – из уже имеющихся
Например: матрица из элементов любого кольца
Алгоритм умножения матриц пишется 1 раз,
вызывает сложение и умножение элементов
Если матрица рациональных чисел – сложение и умножение рациональных чисел
если полиномов – сложение и умножение полиномов

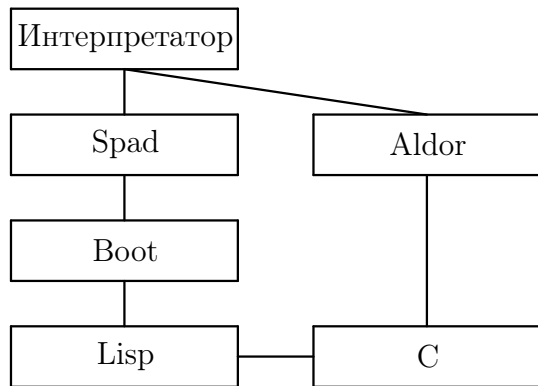
Aldor

Язык подобен SPAD, лучше продуман
Компилятор (через C), лицензия Apache



Aldor

Язык подобен SPAD, лучше продуман
Компилятор (через C), лицензия Apache



muMATH \rightarrow Derive

muMATH Soft Warehouse, Гавайи (Rich, Stoutemyer), 1979
микрокомпьютеры, muSIMP, эвристические методы

muMATH → Derive

muMATH Soft Warehouse, Гавайи (Rich, Stoutemyer), 1979
микрокомпьютеры, muSIMP, эвристические методы

Derive 1988 – менюшный интерфейс, графика

muMATH → Derive

muMATH Soft Warehouse, Гавайи (Rich, Stoutemyer), 1979
микрокомпьютеры, muSIMP, эвристические методы

Derive 1988 – менюшный интерфейс, графика

Texas Instruments купил Soft Warehouse (1999)
калькулятор TI Nspire CAS (2007)

Коммерческие системы

Maple Университет Waterloo 1980, Maplesoft
Небольшое ядро на C – интерпретатор, библиотека
В 2009 куплена японской Cybernet Systems

Коммерческие системы

Maple Университет Waterloo 1980, Maplesoft
Небольшое ядро на C – интерпретатор, библиотека
В 2009 куплена японской Cybernet Systems

Физик-теоретик Steven Wolfram, юзер Macsima – *SMP*
(CalTech, 1979–1988)

Mathematica 1 - 1988, Wolfram Research Inc.

Коммерческие системы

Maple Университет Waterloo 1980, Maplesoft
Небольшое ядро на C – интерпретатор, библиотека
В 2009 куплена японской Cybernet Systems

Физик-теоретик Steven Wolfram, юзер Macsimа – *SMP*
(CalTech, 1979–1988)

Mathematica 1 - 1988, Wolfram Research Inc.

MuPAD (MultiProcessor Algebra Data tool) университет
Падерборн 1992

SciFace, MuPAD Light распространялся бесплатно

Финансирование проекта в университете прекращено
(2005)

MathWorks купил SciFace (2008), toolbox для Matlab

SymPy, SageMath

SymPy python библиотека Ondřej Čertík (2007) BSD
Mathics – *Mathematica* синтаксис (GPL)

SymPy, SageMath

SymPy python библиотека Ondřej Čertík (2007) BSD
Mathics – *Mathematica* синтаксис (GPL)

SageMath python, cython William Stein (2005) GPL
Интерфейсы к Maxima, SymPy, GAP, Singular, GiNaC,
Pari/GP ... + собственный код

SymPy, SageMath

SymPy python библиотека Ondřej Čertík (2007) BSD
Mathics – *Mathematica* синтаксис (GPL)

SageMath python, cython William Stein (2005) GPL
Интерфейсы к Maxima, SymPy, GAP, Singular, GiNaC,
Pari/GP ... + собственный код

GiNaC C++ библиотека Bauer, Frink, Kreckel (1999) GPL

SymPy, SageMath

SymPy python библиотека Ondřej Čertík (2007) BSD
Mathics – *Mathematica* синтаксис (GPL)

SageMath python, cython William Stein (2005) GPL
Интерфейсы к Maxima, SymPy, GAP, Singular, GiNaC,
Pari/GP ... + собственный код

GiNaC C++ библиотека Bauer, Frink, Kreckel (1999) GPL

XCAS/Giac Bernard Parisse (2000) GPL

SymPy, SageMath

SymPy python библиотека Ondřej Čertík (2007) BSD
Mathics – *Mathematica* синтаксис (GPL)

SageMath python, cython William Stein (2005) GPL
Интерфейсы к Maxima, SymPy, GAP, Singular, GiNaC,
Pari/GP ... + собственный код

GiNaC C++ библиотека Bauer, Frink, Kreckel (1999) GPL

XCAS/Giac Bernard Parisse (2000) GPL

Mathemagix C++ Joris van der Hoeven GPL

SymPy, SageMath

SymPy python библиотека Ondřej Čertík (2007) BSD
Mathics – *Mathematica* синтаксис (GPL)

SageMath python, cython William Stein (2005) GPL
Интерфейсы к Maxima, SymPy, GAP, Singular, GiNaC,
Pari/GP ... + собственный код

GiNaC C++ библиотека Bauer, Frink, Kreckel (1999) GPL

XCAS/Giac Bernard Parisse (2000) GPL

Mathmagix C++ Joris van der Hoeven GPL

JAS Java Algebra System Heinz Kredel (2000) GPL

Schoonschip и Form

Schoonschip М. Veltman (потом нобелевский лауреат) на
ассемблере CDC-6000 (1967)

IBM-360 (на PL/I, не Велтман :-)

На ассемблере Atari (Велтман)

Schoonschip и Form

Schoonschip М. Veltman (потом нобелевский лауреат) на ассемблере CDC-6000 (1967)

IBM-360 (на PL/I, не Велтман :-)

На ассемблере Atari (Велтман)

Form J. A. M. Vermaseren на C (1989)

Form-1 – бесплатные бинарники

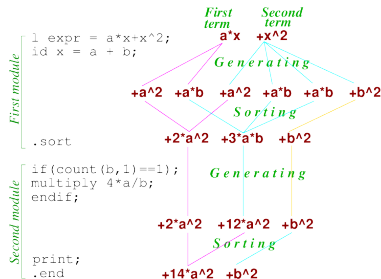
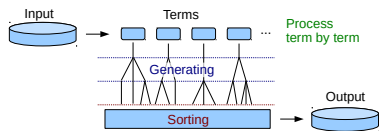
Form-2 – коммерческий

Form-3 – бесплатные бинарники

Form-4 – GPL

Schoonschip и Form

Суммы миллионов членов, размер \gg оперативной памяти (ограничен местом на диске)



Многочлены и рациональные выражения

1: $(x+y)^2$;

$$x^2 + 2xy + y^2$$

2: $x/(x+y) + y/(x-y)$;

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

Свободные и связанные переменные

```
3: a:=(x+y)^2;
```

$$a := x^2 + 2*x*y + y^2$$

```
4: x:=z+1$ a;
```

$$y^2 + 2*y*z + 2*y + z^2 + 2*z + 1$$

```
6: x:=z-1$ a;
```

$$y^2 + 2*y*z - 2*y + z^2 - 2*z + 1$$

```
8: clear x; x; a;
```

```
x
```

$$x^2 + 2*x*y + y^2$$

Свободные и связанные переменные

```
11: x:=2*z$ a:=a;
```

$$a := y^2 + 4*y*z + 4*z^2$$

```
13: clear x; a;
```

$$y^2 + 4*y*z + 4*z^2$$

Многочлены и рациональные выражения

15: $a := (x^3 - y^3) / (x^2 - y^2);$

$$a := \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$$

16: on gcd; $a := a;$

$$a := \frac{x^2 + x*y + y^2}{x + y}$$

18: off gcd;

19: $p := \text{num}(a);$

$$p := x^2 + x*y + y^2$$

20: $\text{den}(a);$

$$x + y$$

Многочлены и рациональные выражения

```
21: deg(p,x);
```

```
2
```

```
22: coeff(p,x);
```

```
{y2,y,1}
```

```
23: coeffn(p,x,2);
```

```
1
```

```
24: clear p;
```

```
25: a:=x^4/(x^3-x^2-x+1);
```

$$a := \frac{x^4}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

```
26: l:=pf(a,x)$
```

```
27: on factor; l;
```

$$\{1, \frac{-1}{4*(x+1)}, \frac{5}{4*(x-1)}, \frac{1}{2*(x-1)^2}\}$$

Факторизация

```
30: a:=6*(x^4-y^4);
```

```
a := 6*(x4 - y4)
```

```
31: on factor; a;
```

```
6*(x2 + y2)*(x + y)*(x - y)
```

```
33: on complex; a;
```

```
6*(x + i*y)*(x - i*y)*(x + y)*(x - y)
```

```
35: off complex,factor;
```

Элементарные функции

36: $\sin(-x)$; $\cos(\pi/4)$; $\sin(5\pi/6)$;

$-\sin(x)$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$

$-\frac{1}{2}$

39: $\log(e^x)$; $\log(1)$; $\log(e)$;

x

0

1

42: $\sqrt{0}$; $\sqrt{12x^2y}$; $\sqrt{x^2-2x+1}$;

0

$2\sqrt{y}\sqrt{3}\text{abs}(x)$

$\text{abs}(x - 1)$

Дифференцирование

45: a:=e^x*log(y)/sin(x);

$$a := \frac{e^x \cdot \log(y)}{\sin(x)}$$

46: df(a,x);

$$\frac{e^x \cdot \log(y) \cdot (-\cos(x) + \sin(x))}{\sin(x)^2}$$

47: df(a,x,2);

$$\frac{2 \cdot e^x \cdot \log(y) \cdot (\cos(x)^2 - \cos(x) \cdot \sin(x) + \sin(x)^2)}{\sin(x)^3}$$

48: df(a,y);

$$\frac{e^x}{\sin(x) \cdot y}$$

Интегрирование

49: a:=int(1/(x^4-1),x);

$$a := \frac{-2 \cdot \operatorname{atan}(x) + \log(x - 1) - \log(x + 1)}{4}$$

50: df(a,x);

$$\frac{1}{x^4 - 1}$$

51: int(x^2*e^x,x);

$$e^x (x^2 - 2x + 2)$$

52: int(1/(e^x+1),x);

$$-\log(e^x + 1) + x$$

53: int(sqrt(x)*e^(-x),x,0,infinity);

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Числа

```
54: a:=123456789/987654321; a^4;
```

```
a := 
$$-\frac{13717421}{109739369}$$

```

```

$$-\frac{35407060325904472511826520081}{145027324381150620778929266821921}$$

```

```
56: on rounded; precision 30$
```

```
58: a; a^4;
```

```
0.12499999886093750001423828125
```

```
0.000244140616101074340498427602738
```

```
60: pi; e;
```

```
3.14159265358979323846264338328
```

```
2.71828182845904523536028747135
```

```
62: a:=sin(pi/4); a^2;
```

```
a := 0.707106781186547524400844362105
```

```
0.5
```

```
64: off rounded;
```

Подстановки

```
65: a:=(x+y)^2;
```

$$a := x^2 + 2*x*y + y^2$$

```
66: a:=sub(x=x+1,a);
```

$$a := x^2 + 2*x*y + 2*x + y^2 + 2*y + 1$$

```
67: a:=sub(x=x-1,y=y^2,a);
```

$$a := x^2 + 2*x*y^2 + y^4$$

```
68: sub(x=y,y=x,a);
```

$$x^4 + 2*x^2*y + y^2$$

```
69: clear a;
```

Подстановки

```
70: let x*y^2=z;
```

```
71: x^2*y^4; x^3*y^5;
```

$$z^2$$
$$x*y*z^2$$

```
73: clear x*y^2; x^2*y^4;
```

$$x^2*y^4$$

Комплексные выражения

```
75: z:=x+i*y; z:=z^2;
```

```
z := i*y + x
```

```
z := 2*i*x*y + x2 - y2
```

```
77: sub(i=-i,z);
```

```
- 2*i*x*y + x2 - y2
```

```
78: 1/z;
```

```
-----  
1  
-----  
2*i*x*y + x2 - y2
```

```
79: on rationalize; 1/z;
```

```
- 2*i*x*y + x2 - y2  
-----  
x4 + 2*x2*y2 + y4
```

```
81: off rationalize; clear z;
```


Функции и подстановки

```
83: operator f;
```

```
84: let f(x)=x^2;
```

```
85: f(x); f(x+y);
```

$$x^2$$
$$f(x + y)$$

```
87: clear f(x);
```

```
88: for all x let f(x)=x^2;
```

```
89: f(x); f(x+y);
```

$$x^2$$
$$x^2 + 2*x*y + y^2$$

```
91: for all x clear f(x);
```

Функции и подстановки

```
92: for all x such that fixp(x) let f(x)=x^2;
```

```
93: f(a); a:=2$ f(a);
```

```
f(a)
```

```
4
```

```
96: for all x such that fixp(x) clear f(x);
```

```
97: a:=(x*f(x))^2;
```

```
a := f(x)2 * x2
```

```
98: df(a,x);
```

```
2*f(x)*x*(df(f(x),x)*x + f(x))
```

Нечётная функция

```
99: let f(0)=0;
100: for all x such that not ordp(-x,x)
      let f(x)=-f(-x);
101: f(x); f(-x); f(x-y); f(y-x); f(x-y)+f(y-x);
f(x)
- f(x)
f(x - y)
- f(x - y)
0
106: clear f(0);
107: for all x such that not ordp(-x,x)
      clear f(x);
```

Элементарные функции

```
108: for all x let cos(x)^2=(1+cos(2*x))/2,  
      sin(x)^2=(1-cos(2*x))/2;  
109: for all x,y  
      let cos(x)*cos(y)=(cos(x-y)+cos(x+y))/2,  
          sin(x)*sin(y)=(cos(x-y)-cos(x+y))/2,  
          sin(x)*cos(y)=(sin(x-y)+sin(x+y))/2;  
110: a:=a1*cos(x)+a2*cos(2*x)+b1*sin(x)+b2*sin(2*x)$  
111: factor cos,sin; a^2;
```

$$\begin{aligned} & (\cos(4*x)*(a_1^2 - b_1^2) + 2*\cos(3*x)*(a_1*a_2 - b_1*b_2) \\ & + \cos(2*x)*(a_1^2 - b_1^2) + 2*\cos(x)*(a_1*a_2 + b_1*b_2) \\ & + 2*\sin(4*x)*a_2*b_2 + 2*\sin(3*x)*(a_1*b_2 + a_2*b_1) \\ & + 2*\sin(2*x)*a_1*b_1 + 2*\sin(x)*(a_1*b_2 - a_2*b_1) \\ & + a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2)/2 \end{aligned}$$

Элементарные функции

```
113: clear a; remfac cos,sin;  
115: for all x clear cos(x)^2,sin(x)^2;  
116: for all x,y  
      clear cos(x)*cos(y),sin(x)*sin(y),sin(x)*cos(y);
```

Решение уравнений

```
117: s:=solve(a*x^2+b*x+c=0,x);
```

$$s := \left\{ x = \frac{\sqrt{-4ac + b^2} - b}{2a}, \right. \\ \left. x = \frac{-(\sqrt{-4ac + b^2} + b)}{2a} \right\}$$

```
118: sub(first(s),x);
```

$$\frac{\sqrt{-4ac + b^2} - b}{2a}$$

Решение уравнений

```
119: s:=solve({x+y+z=1,x+2*y+3*z=2,x+3*y+6*z=4},  
             {x,y,z});
```

```
s := {{x=1,y=-1,z=1}}
```

```
120: s:=first(s);
```

```
s := {x=1,y=-1,z=1}
```

```
121: sub(s,x); sub(s,y); sub(s,z);
```

```
1
```

```
-1
```

```
1
```

```
124: clear s;
```

Решение уравнений

```
125: solve({x^2+y^2=25,x*y=12},{x,y});  
{x=4,y=3}, {x=3,y=4}, {x=-3,y=-4}, {x=-4,y=-3}
```

```
126: solve(sin(x)=a,x);  
{x=2*arbint(1)*pi + asin(a),  
  x=2*arbint(1)*pi - asin(a) + pi}
```

```
127: solve(exp(x)=a,x);  
{x=2*arbint(2)*i*pi + log(a)}
```


Степенные ряды

```
128: load_package tps; psexplim 6$
```

```
130: sinx:=ps(sin(x),x,0);
```

$$\text{sinx} := x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + O(x^7)$$

```
131: cosx:=ps(cos(x),x,0);
```

$$\text{cosx} := 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + O(x^7)$$

```
132: tanx:=ps(tan(x),x,0);
```

$$\text{tanx} := x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + O(x^7)$$

Степенные ряды

133: $\tan x \cdot \cos x$;

$$x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^7)$$

134: $\sin x / \cos x$;

$$x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^7)$$

135: $df(\sin x, x)$;

$$1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + o(x^7)$$

Степенные ряды

```
136: cotx:=ps(1/tanx,x,0);
```

$$\cot x := x^{-1} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 + O(x^7)$$

```
137: cotx*tanx;
```

```
1
```

```
138: sinx^2+cosx^2;
```

$$1 + O(x^7)$$

```
139: clear cosx,cotx;
```

Степенные ряды

```
140: a:=ps(tan(sinx),x,0);
```

$$a := x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + O(x^7)$$

```
141: b:=pscompose(sinx,tanx);
```

$$b := x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 + O(x^7)$$

```
142: a:=a-b;
```

$$a := 0 + O(x^7)$$

```
143: psexplim 9$ a;
```

$$\frac{1}{30}x^7 + \frac{29}{756}x^9 + O(x^{10})$$

```
145: psterm(a,7);
```

$$\frac{1}{30}$$

```
146: clear a,b,sinx; psexplim 6$
```

Степенные ряды

```
148: atanx:=ps(atan(x),x,0);
```

$$\text{atanx} := x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + O(x^7)$$

```
149: psreverse(tanx);
```

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + O(x^7)$$

```
150: clear tanx,atanx;
```

Пределы

```
151: limit((tan(sin(x))-sin(tan(x)))/x^7,x,0);
```

$$-\frac{1}{30}$$

```
152: limit!(exp(1/x),x,0);
```

```
infinity
```

```
153: limit!-(exp(1/x),x,0);
```

```
0
```

Суммы

154: $\text{sum}(n, n, 0, m);$

$$\frac{m(m+1)}{2}$$

155: $\text{sum}(n^2, n, 0, m);$

$$\frac{m(2m^2 + 3m + 1)}{6}$$

156: $\text{sum}(x^n, n, 0, m);$

$$\frac{x^{m+1} - 1}{x - 1}$$

157: $\text{sum}(1/(n(n+2)), n, 1, m);$

$$\frac{m(3m+5)}{4(m^2 + 3m + 2)}$$

Матрицы

```
158: matrix a2(2,2); operator a;  
159: for i:=1:2 do for j:=1:2 do a2(i,j):=a(i,j);  
160: a2;
```

$$\begin{bmatrix} a(1,1) & a(1,2) \\ a(2,1) & a(2,2) \end{bmatrix}$$

```
161: det(a2); trace(a2);  
a(2,2)*a(1,1) - a(2,1)*a(1,2)  
a(2,2) + a(1,1)
```

```
163: tp(a2);  
[a(1,1) a(2,1)]  
[a(1,2) a(2,2)]
```

```
164: a2^(-1)*det(a2);  
[ a(2,2)      - a(1,2)]  
[ - a(2,1)    a(1,1) ]
```


Матрицы

```
165: matrix v2(2,1); operator v;  
166: for i:=1:2 do v2(i,1):=v(i);  
167: v2; a2*v2;
```

$$\begin{bmatrix} v(1) \\ v(2) \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a(1,2)*v(2) + a(1,1)*v(1) \\ a(2,2)*v(2) + a(2,1)*v(1) \end{bmatrix}$$

Матрицы

```
169: matrix b2;
```

```
170: b2:=mat((1,0),(0,-1));
```

$$b2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
171: a2*b2; b2*a2;
```

$$\begin{bmatrix} a(1,1) & -a(1,2) \\ a(2,1) & -a(2,2) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a(1,1) & a(1,2) \\ -a(2,1) & -a(2,2) \end{bmatrix}$$

```
173: a2*b2-b2*a2;
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -2*a(1,2) \\ 2*a(2,1) & 0 \end{bmatrix}$$